,,

נגדיר

למשל

# תרגיל

יהי . נגדיר ולכל , . הוכח שהסדרה מתכנסת ומצא את גבולה.

## פתרון

*נוכיח באינדוקציה:*

*עבור :*

*אפשר לראות בקלות ש סדרה אי שלילית. נניח ונוכיח ש*

*. מכיוון ש ומותר להעלות בריבוע את שני האגפים החיוביים . לכן מונוטונית יורדת וחסומה כי . לכן הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.*

*עבור סדרה מתכנסת מתקיים* . אנחנו יודעים ש. זה שוויון בין סדרות מתכנסות לכן . נסמן . לכן לפי אריתמטיקה של גבולות . למשוואה יש שתי פתרונות . אבל לכן כלומר ולכן

# הגדרה

תהי סדרה. אם לכל קיים כך שלכל מתקיים אזי נקראת סדרת קושי(Cauchy)

# משפט

תהי סדרה ממשית. אזי מתכנס לL ⬄ סדרת קושי.

## הערה

זה לא נכון ב: לדוגמה . הסדרה מתכנסת ב אבל איברי הסדרה רציונאליים והמרחק ביניהם נשאר זהה ב וב. לכן זו סדרת קושי ב אבל היא לא מתכנסת ב.

## הערה

בעזרת תנאי קושי אפשר להראות שסדרה אינה מתכנסת ללא שימוש בגבול.

# תרגיל

תהי סדרה כך ש. הוכח ש מתכנסת.

## פתרון

נוכיח שזו סדרת קושי ולכן מתכנסת. יהי , צ"ל כך שלכל מתקיים .

*כלומר המרחק בין ל קטן מסכום המרחקים בין כל שני איברים עוקבים מ עד .*

*נתון ש. כלומר . נמשיך את הפיתוח ממקודם:*

נוסחה: . נמשיך את הפיתוח:

*עבור מתקיים* אם אזי . מש"ל

# תרגיל

תהי כך ש. הוכח ש

## פתרון

כלומר זו סדרה מונוטונית עולה, ולכן או ש מתכנסת למספר ממשי L או שהיא מתכנסת במובן הרחב ל. נוכיח ש אינה סדרת קושי ולכן לא מתכנסת למספר ממשי.

צ"ל: קיים כך שלכל קיים כך ש

נבחר

לכן ניקח , לכל ניקח ו ונקבל

# תרגיל

יהי ותהי סדרה המקיימת . הוכח ש מתכנסת.

## פתרון

.

נסמן , לכן

*קבוצה A הינה פתוח אם לכל נקודה קיימת סביבה*

*– פתוחה? לא, כי אין סביבה מהצורה לכל*

*אינה פתוחה כי עבור 1 אין סביבה בקבוצה.*

# הגדרה

נקודת הצטברות של קבוצה היא נקודה כך שבכל קבוצה פתוחה המכילה את a קיים לפחות איבר אחד מA שאינו a. כלומר לכל קבוצה פתוחה כך ש מתקיים

## דוגמה

מהן נקודות ההצטברות של בתוך

### תשובה

כל

### הוכחה

תהי , רוצים להוכיח שr נקודת הצטברות של .

תהי קבוצה פתוחה המכילה את r, לכן קיים כך ש. לפי משפט בכל קטע ממשי מהצורה חייב להיות מספר רציונלי. מכיל מספר רצינלי שונה מr.

## דוגמה

מהן נקודות ההצטברות של ?

### תשובה

אין. נניח שr נקודת הצטברו על , לכן ניקח סביבה של r – אם r אינו שלם אז אפשר למצוא בקלות סביבה שלו שאינה מכילה מספרים שלמים, ואם r מספר שלם אז אפשר למצוא סביבה שאין בה מספרים שלמים שונים מr